MA’RUZA

ANIQMAS INTEGRAL

Ma'ruzaning rejasi

1. Boshlang’ich funksiya va uni topish.
2. Aniqmas integral va uning xossalari.
3. Aniqmas integrallar jadvali.
4. Integrallashga doir misollar yechish.

Tayanch so’z va iboralar: boshlang’ich funksiya, aniqmas integral, o’zgarmas son, yo’l, tezlik, tezlanish, aniqmas integarlni geometrik ma’nosi, fizik ma’nosi, integrallash, differensiallash. Integrallar jadvali, integrallash qoidalari.

1. Boshlang’ich funksiya va uni topish.

Bizga $y = f(x)$ funksiya berilgan bo’lsin, bu funksiyaning hosilasini topish amaliga differensiallash amali deyilar edi. Masalan, harakat tenglamasi $s = f(t)$ berilgan bo’lsa, uning t bo’yicha differensiallash bilan tezlikni topamiz. Yana bu tezlikni t bo’yicha differensiallasak tezlanish a ni topamiz. Biroq, amalada bunga teskari masalani ham yechishga to’g’ri keladi, ya’ni $a = a(t)$ tezlanish t vaqtning funksiyasi sifatida berilgan bo’lsa, t vaqtda o’tilgan s yo’lni va v tezlikni topish kerak bo’ladi. Buning uchun, bu yerda hosilasi $a = a(t)$ bo’lgan $v = v(t)$ funksiyani topib, so’ngra hosilasi v bo’lgan $s = s(t)$ funksiyani topish kerak bo’ladi. Ko’p masalalarda noma’lum funksiyaning berilgan hosilasi bo’yicha o’zini topishga to’g’ri keladi, ya’ni agar $y = f(x)$ funksiya berilgan bo’lsa, shunday $F(x)$ funksiyani topish kerakki, uning hosilasi berilgan funksiyaga teng bo’lsin $F'(x) = f(x)$.

1-Ta’rif. Agar $[a,b]$ kesmaning har bir nuqtasida $F'(x) = f(x)$ tenglik bajarilsa, u holda $F(x)$ funksiya berilgan $f(x)$ funksiyaning boshling’ich funksiyasi deyiladi.

Masalan, a) $f(x) = x^2$ berilgan bo’lsin. Uning boshlang’ich funksiyasi $F(x) = \frac{x^2}{3}$ bo’ladi, chunki $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{3x^2}{3} = x^2$; b) Agar $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ bo’lsa, uning boshlang’ich funksiyasi $F(x) = -ctgx$ ga teng, chunki $F'(x) = (-ctgx)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.

Agar $f(x)$ funksiya $F(x)$ boshlang’ich funksiyaga ega bo’lsa, bunda $f(x)$ ning boshqa har qanday boshlang’ich funksiyasi $F(x)$ dan o’zgarmas C ga farq qiladi.

Masalan, $F(x)$ berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlang’ich funksiyasi bo’lsin, $G(x)$ esa $f(x)$ ning boshqa boshlang’ich funksiyasi bo’lsa, $G(x) = F(x) + C$ bo’ladi, bu yerda C -o’zgarmas miqdor. Demak, agar $F(x)$ $f(x)$ ning boshlang’ich funksiyasi bo’lsa, u holda $F(x) + C$ ham $f(x)$ ni boshlang’ich funksiyasi bo’lib, u $f(x)$ ning barcha boshlang’ich funksiyalar to’plamini tashkil etadi. Bundan kelib chiqadiki $f(x)$ funksiyaning boshlang’ich funksiyalari cheksiz ko’p bo’lar ekan.

Masalan, $f(x) = x^2$, $F(x) = \frac{x^3}{3}$ edi. Lekin $F(x) = \frac{x^3}{3} + C$ ham boshlang’ich funksiya bo’ladi. Chunki $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$. Endi aniqmas integralni ta’rifini keltiramiz.

2-Ta’rif. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang’ich funksiyasi bo’lsa, u holda $F(x) + C$ ifoda ham boshlang’ich funksiya bo’lib, $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deyiladi va

$\int f(x)dx$ ko'rinishda yoziladi. Bu yerda $\int$ belgi integral belgisi, $f(x)$-integral ostidagi funksiya deyiladi. Shunday qilib, aniqmas integral $y = F(x) + C$ funksiyalar to'plamidan iborat bo'lar ekan.

Aniqmas integralning geometrik ma'nosi, tekislikdagi egri yoki to'g'ri chiziqlar oilasidan iborat bo'lib, bular bir chiziqning o'ziga parallel holda OY o'qi bo'ylab pastga yoki yuqoriga siljitishdan iborat bo'ladi. Har qanday uzluksiz funksiyaning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'ladi. Demak, bunday funksiyaning aniqmas integrali mavjuddir.

Funksiyani integrallash uchun uning boshlang'ich funksiyasini topish kerak bo'lar ekan. Shu sababli biror funksiyani integrallaganda topilgan boshlang'ich funksiyasidan hosila olib, integrallash natijasi tekshiriladi.

2. Aniqmas integralning xossalari.

a) Integral va differensial belgilari qarama-qarshi bo'lgani uchun ketma-ket kelganda qisqaradi, ya'ni $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$. $\int df(x) = f(x) + C$. (C -konst).

b) a va b lar ixtiyoriy o'zgarmas sonlar bo'lganda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C \quad \text{bo'ladi.}$$

v) Integraldan olingan hosila integral ostidagi funksiyaga teng, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+C\right)' = f(x) \quad \text{bo'ladi.}$$

g) Bir nechta algebraik funksiyalar yig'indisining aniqmas inetgarli shu funksiyalar integrallarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int\left[f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)\right]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx.$$

d) O'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin, ya'ni agar C - const bo'lsa, $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$ bo'ladi.

Bu xossalarni integralni ta'rifidan foydalanib osongina isbotlash mumkin. Buni isboti talabalarga mustaqil ish sifatida topshiriladi.

3. Integrallar jadvali.

Hosilalar jadvalidan integrallar jadvali bevosita kelib chiqadi. Jadvalda keltirilgan tengliklarni to'g'riligini differensiallash yo'li bilan tekshirish, ya'ni tenglikni o'ng tomonidagi funksiyaning hosilasi integral ostidagi funksiyaga tengligini aniqlash mumkin.

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (C -const)
2. $\int \dfrac{1}{x}dx = \ln|x| + C$
3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ (C -const, $a > 0$)
4. $\int e^x dx = e^x + C$ (C -const)
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$
7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
9. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

10. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

11. $\int lbx dx = x\ln x - x + C$

12. $\int x dx = \dfrac{x^2}{2} + C$

13. $\int dx = x + C$

14. $\int \dfrac{dx}{x^2+a^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a} + C$ (C -const, $a \neq 0$)

15. $\int \dfrac{dx}{x^2-a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$ (C -const, $a \neq 0$)

16. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$ (C -const, $a \neq 0$)

17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C = -\arccos\dfrac{x}{a} + C$ (C -const, $a > 0$)

18. $\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\dfrac{x}{2}\right| + C = \ln|\cos ecx - ctgx| + C$ (C -const)

19. $\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + C = \ln|tgx + \sec x| + C$

20. $\int \dfrac{dx}{a^2 - x^2} = -\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C$

Yuqorida keltirilgan aniqmas integralning xossalaridan va integrallar jadvalidan foydalanib, aniqmas integralni topish yoki hisoblash mumkin.

Masalan, $\int \dfrac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$ berilgan bo'lsin. Bu integralni hisoblaymiz

$$\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}dx = \int \frac{x^4 - 2x^2 + x^2 - 2}{x^{\frac{2}{3}}}dx = \int \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^{\frac{2}{3}}} =$$

$$= \int\left(\frac{x^4}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{x^2}{x^{\frac{2}{3}}} - \frac{2}{x^{\frac{2}{3}}}\right)dx = \int x^{\frac{10}{3}}dx - \int x^{\frac{4}{3}}dx - 2\int x^{-\frac{2}{3}}dx =$$

$$= \frac{x^{\frac{10}{3}+1}}{\frac{10}{3}+1} - \frac{x^{\frac{4}{3}+1}}{\frac{4}{3}+1} - 2\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{13}\sqrt[3]{x^{13}} - \frac{3}{7}\sqrt[3]{x^7} - 6\sqrt[3]{x} + C.$$

Endi topilgan ifodadan hosila olsak, integral ostidagi funksiya kelib chiqsa, topilgan natija to'g'ri bo'ladi. Haqiqatan ham

$$\left(\frac{3}{13}x^{\frac{13}{3}} - \frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + C\right)' = x^{\frac{10}{3}} - x^{\frac{4}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{x^4 - x^2 - 2}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{x^4 - 2x^2 + x^2 - 2}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{x^2(x^2-2) + (x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}} = \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}$$

Demak, integrallash to'g'ri bajarilgan.

4. Integrallashga doir misollar.

1-misol. $\int \dfrac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiyani shaklini almashtirib, uni xossalaridan foydalanib hsoblaymiz.

$$\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}dx = \int \left[\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)} + \frac{x^2}{x^2(1+x^2)}\right]dx =$$

$$\int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + arctgx + C.$$

2-misol. $\int 8\sin^2 \frac{x}{2}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechish. Integral ostidagi funksiya darajasini pasaytirish formulasidan foydalanib $2\sin^2 \frac{x}{2} = 1-\cos x$ bo'ganidan va integralni xossasidan foydalanib topamiz.

$$\int 8\sin^2 \tfrac{x}{2}dx = 8\int \sin^2 \tfrac{x}{2}dx = 4\int (1-\cos x)dx = 4\int xdx - 4\int \cos xdx =$$

$$4x - 4\sin x + C = 4(x-\sin x) + C.$$

3-misol. $\int 3^x e^{3x}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechish. $\int 3^x e^{3x}dx = \int (3e^3)^x dx = \dfrac{(3e^3)^x}{\ln(3e^3)} + C.$

4-misol. $\int \dfrac{x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$ aniqmas integralni hisoblang.

Yechish. $\int \dfrac{x-\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \dfrac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \dfrac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} -$

$$-\int \arcsin x d(\arcsin x) = -\sqrt{1-x^2} - \tfrac{1}{2}\arcsin^2 x + C.$$